به نام زندگی

مثال: یک تاس سالم را دو بار پرتاب می‌کنیم، احتمال این پیش آمد را به دست بیاورید که حاصل‌جمع دو عدد دیده شده برابر 8 باشد.

کل تعداد حالت‌های ممکن = N

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}$$

$$N = |\Omega| = 36$$

N_A : تعداد حالت‌های مورد نظر

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

$$\Rightarrow N_A = 5$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{5}{36}$$

در این فضای نمونه به صورت مثال $A_1 = \{(2,6)\}$ یک پیش آمد ساده است داریم

$$P(A_i) = \frac{1}{36} \quad , \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{36} A_i\right) = 1 \quad , \quad \bigcup_{i=1}^{36} A_i = \Omega$$

همان طور که دیدیم برای محاسبه احتمال هر پیشامد دلخواه A ، لازم است که بدانیم

n_A : تعداد حالات مورد نظر ،

n : تعداد کل حالت های ممکن را به دست بیاوریم. یکی از ابزارهای به دست آوردن این تعدادها ، استفاده از آنالیز ترکیبی است.

بنابراین در ادامه به مرور کلی آنالیز ترکیبی می پردازیم و مفاهیم پایه ای آن را مرور خواهیم کرد.

• مروری بر آنالیز ترکیبی

- جایگشت Permutation (ترتیب)

تعداد گروه های چینش n شی در m مکان به طوری که ترتیب چینش آنها اهمیت داشته باشد را جایگشت n شی در m مکان (محل) می گوییم.

$\_\_\quad \_\_\quad \_\_\quad \cdots \quad \_\_$

مکان اول $\uparrow$ ... مکان m ام $\uparrow$

$N \quad N-1 \quad \cdots \quad N-M+1$

تعداد حالت ها $= N(N-1)\cdots(N-M+1)$

$$= P_m^N = \frac{N!}{(N-m)!}$$

* در مسأله قبل اگر تکرار مجاز باشد، تعداد حالت‌های ممکن برابر است با

$$\text{تعداد حالت‌های ممکن} = n^m$$

__ __ __ ... __

مهمان اول ... مهمان m ام

n n ... n

مثال: با عددهای $3, 5, 7, 9, 6$ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟

الف) اگر تکرار مجاز نباشد

$$\underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}$$

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{(5-3)!} = P_3^5$$

ب) اگر تکرار مجاز باشد

$$\underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{5}{\_}$$

$$\text{تعداد حالت‌ها} = 5^3$$

* در مورد جایگشت N شئ در m مکان P_m^N ، رابطه بازگشتی زیر برقرار است

$$P_m^N = (N-m+1)\, P_{m-1}^N$$

(recarsive)

$$N! = N\,(N-1)!$$

* تعداد حالت های ممکن برای چینش N شی در N مکان برابر است با

$$P_N^N = N(N-1)\cdots 1 = N! = \frac{N!}{0!} = N!$$

مکان	1	2	$\cdots$	N
	N	$N-1$		1

- ترکیب Combination

تعداد گروه انتخاب m شی از بین N شی را به طوری که ترتیب آنها مهم نباشد

ترکیب m شی از N شی می‌گوییم

$$C_m^N = \binom{N}{m} = \frac{P_m^N}{m!} = \frac{N!}{(N-m)!\,m!} = C_{N-m}^N = \binom{N}{N-m}$$

تعداد حالت‌های چینش m شی از m مکان

مثال: تعداد زیرمجموعه های 4 عضوی از یک مجموعه ۱۰ عضوی، چقدر است؟

$$C^{10}_{4} = \binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

مثال: می‌خواهیم 4 توپ قرمز و 6 توپ سبز را در ۱۰ جعبه قرار دهیم، به طوری که در هر جعبه، یک توپ قرار داشته باشد. تعداد حالت های ممکن، چقدر است؟

___ ___ . . . ___

			۹
قرمز	سبز		قرمز
قرمز	قرمز		سبز

تعداد حالت‌های ممکن

$$C_4^{10} = C_6^{10} = \binom{10}{4} = \binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\,6!}$$

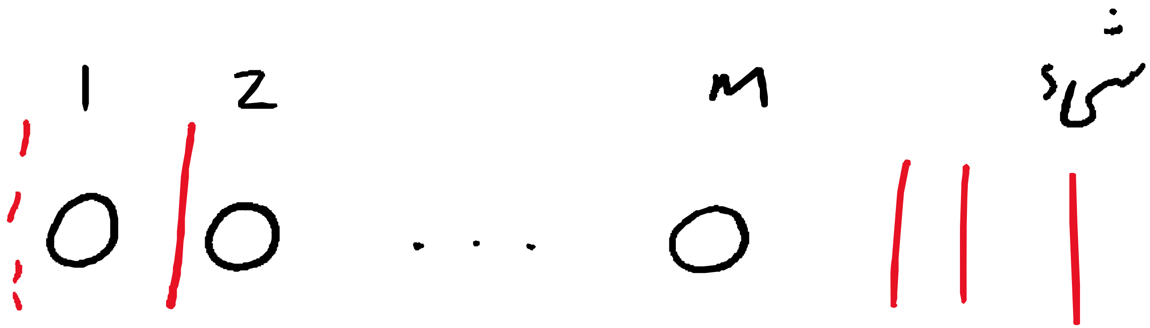
به طور کلی تعداد حالت های قرار گرفتن m شی مشابه در N مکان ، به طوری که در هر مکان فقط یک شی قرار بگیرد ($m \leq N$) برابر است .

$$C_m^N = \frac{N!}{m!\,(N-m)!}$$

در مسئله بالا اگر ترتیب قرار گرفتن اشیا ، مهم باشد ، تعداد حالت ها برابر است با

$$m!\,C_m^N = \frac{N!}{(N-m)!} = P_m^N$$

* اگر بخواهیم m شی را در n جعبه یکسان قرار دهیم ، به طوری که در هر جعبه به هر تعداد دلخواه شی قرار بگیرد. تعداد حالت های ممکن برابر است با:



در این مسئله ای خواهیم m شی را به N قسمت تقسیم کنیم به طوری که در هر قسمت، هر تعداد دلخواهی شی قرار داشته باشند. بنابراین مسئله معادل انتخاب $N-1$ مرز (برای تقسیم بندی به N قسمت) از بین

$m+N-1$ مکان ممکن برای مرزگذاری.

بنابراین تعداد حالت های ممکن برابر است!

$$C_{N-1}^{m+N-1}$$

$$C_{N-1}^{m+N-1} = \binom{m+N-1}{N-1} = \frac{(m+N-1)!}{(N-1)!\, m!}$$

مثال: معادله $x_1+x_2+\dots+x_N = m$ که در آن x_i ها اعداد
صحیح غیرمنفی (یعنی صفر یا مثبت) هستند، چند جواب دارد؟

مسئله معادل این است که می‌خواهیم m تا '1' را بین جعبه‌های $x_1, \dots, x_N$
تقسیم کنیم به طوری که هر تعداد دلخواهی '1' در هر جعبه می‌تواند قرار بگیرد.

$$m \qquad |\,1\,|\,1\,\dots\,|\,1\,|\,|\,|\,|$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = C^{m+N-1}_{N-1}$$

به عنوان یک مثال عددی : معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10$ چند جواب صحیح غیرمنفی دارد؟

$$C^{10+7-1}_{7-1} = C^{16}_{6}$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 1 \ , \quad x_7 = 4$$

$$x_1 = x_2 = 0 \ , \quad x_3 = x_4 = 1 \ , \quad x_5 = x_6 = 2 \ , \quad x_7 = 4$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 0 \ , \quad x_7 = 10$$

* اگر بخواهیم m شی را در N جعبه قرار دهیم به طوری که در هر جعبه دست کم یک شی قرار داشته باشد $(m \geq N)$ تعداد حالت های ممکن برابر است با

مسئله معادل این است که می خواهیم m شی را به N قسمت تقسیم کنیم به طوری که هیچ قسمتی خالی نماند. بنابراین مسئله معادل انتخاب $N-1$ مرز (به خاطر تقسیم بندی به N قسمت) از بین $m-1$ مکان ممکن برای مرزها.

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $= C^{m-1}_{N-1} = \binom{m-1}{N-1} = \dfrac{(m-1)!}{(N-1)!\,(m-N)!}$

مثال: معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_N = m$ را در نظر بگیرید که در آن x_i ها

اعداد صحیح مثبت هستند $(m \geq N)$ این معادله چند جواب دارد؟

تا m

$1 \,|\, 1 \,|\, \cdots \,|\, 1$

تعداد جواب‌ها $= C^{m-1}_{N-1} = \binom{m-1}{N-1}$

به عنوان مثال عددی : تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 10$

که در آن x_i ها اعداد صحیح مثبت هستند چقدر است؟

$$C_{7-1}^{10-1} = C_6^9$$

$x_1 = x_2 = \dots = x_6 = 1 \quad , \quad x_7 = 4$

$x_1 = x_2 = 1 , \quad x_3 = x_4 = 2 \quad , \quad x_5 = 1 \quad x_6 = 1 \quad x_7 = 2$

همان طور که می دانیم بین ترکیب C_m^N با بسط دو جمله ای $(x+y)^N$ رابطه ای به صورت زیر وجود دارد.

$$(x+y)^N = \sum_{m=0}^{N} C_m^N \, x^m y^{N-m} = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} x^m y^{N-m}$$

$$\underbrace{xx\cdots x}_{m}\,\underbrace{yy\cdots y}_{N-m}$$

$$(x+y)(x+y) = (x+y)^2 = \underbrace{x^2}_{1x^2} + \underbrace{xy + yx}_{2xy} + \underbrace{y^2}_{1y^2}$$

$$(x+y)(x+y)^2 = (x+y)^3 = \binom{3}{3}x^3 + \binom{3}{2}x^2y + \binom{3}{1}xy^2 + \binom{3}{0}y^3$$

با استفاده از بسط دوجمله‌ای به تساوی معروف زیر در مورد ترکیب‌ها می‌رسیم

$$\sum_{m=0}^{N} C_m^N = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} = 2^N$$

اثبات: در رابطه بسط دوجمله‌ای $(x+y)^N$ قرار دهید $x=y=1$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{N} C\binom{N}{m} = \sum_{m=0}^{N} \binom{N}{m} = 2^N$$

مثال، تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی N عضوی چقدر است؟

$$\underbrace{\binom{N}{0}}_{\text{تعداد زیرمجموعه با صفر عضو}} + \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{با یک عضو}} + \dots + \underbrace{\binom{N}{N}}_{\text{با } N \text{ عضو}} = 2^N$$

مثال: تعداد بردارهای باینری در یک فضای برداری N بعدی چقدر است؟

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{N\times 1}$$

بردار باینری در فضای N بعدی

مکان	1	2	...	N
حالت	2	2	...	2

$$\text{تعداد کل} = 2^N = \underbrace{\binom{N}{0}}_{\text{تعداد بردارهای با وزن صفر}} + \underbrace{\binom{N}{1}}_{\text{تعداد بردار با وزن 1}} + \cdots + \underbrace{\binom{N}{N}}_{\text{تعداد بردار با وزن N}}$$

وزن یک بردار باینری = تعداد مکان هایی که در آنها عدد 1 قرار دارد.

تعداد بردارهای باینری با وزن m $= \binom{N}{m}$

مکان $\quad N \quad \ldots \quad 2 \quad 1$

$\_\_ \ \ldots \ \_\_ \ \_\_$